

# Über elektrische Wellen längs eines dielektrischen Zylinders in einer dielektrischen Umgebung, wobei eines oder beide der beiden Medien Plasmen sind

Von WINFRIED OTTO SCHUMANN

Aus dem Elektrophysikalischen Institut der Technischen Hochschule München

(Z. Naturforsch. 5 a, 181—191 [1950]; eingegangen am 18. Juli 1949)

Es wird die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen längs Kreiszylinern untersucht:  
1. Dielektrischer Zylinder in Plasmatisphäre, 2. Plasmazylinder in dielektrischer Atmospäre, 3. Plasmazylinder in Plasmatisphäre. Ferner werden die stehenden Wellen (Eigenschwingungen) untersucht, die durch zwei ebene, leitende Wände senkrecht zur Zylinderachse erzeugt werden.

Infolge der Dispersion der Dielektrizitätskonstante eines Plasmas und der Tatsache, daß diese auch negativ werden kann, ergibt sich eine Vielzahl von Wellentypen, in den meisten Fällen die Möglichkeit einer Ausbreitung nur in endlichen, begrenzten Frequenzgebieten, und die Tatsache, daß die Phasengeschwindigkeit mit der Frequenz sowohl erheblich zu- als auch abnehmen kann. Am deutlichsten zeigt sich dies in Paradoxien des Verlaufs der Eigenfrequenzen des Systems des durch zwei Ebenen begrenzten Zylinders.

Grenzflächenwellen mit geringer Phasen- und Gruppengeschwindigkeit und starker Energiekonzentration unmittelbar an der Grenzfläche Zylinder—Außenraum sind in allen Fällen möglich.

Das Problem der Ausbreitung elektromagnetischer Wellen längs zylindrischer Dielektrika ist zuerst im Sommerfeldschen Institut von D. H ondros und P. D e b y e, AP. 32,465, 1910 behandelt worden<sup>1</sup>. Im folgenden sollen die Erscheinungen behandelt werden, die auftreten, wenn eines oder beide Dielektrika Plasmen sind. Unter einem Plasma sei z. B. ein elektrisch neutrales Gas verstanden, dessen Dielektrizitätskonstante  $\epsilon_r = 1 - \omega_0^2/\omega^2$  ist, wo  $\omega_0^2 = N e^2/\epsilon_0 m$  ist, wo  $N$  die Elektronendichte bezeichnet. Es sind nur Elektronenbewegungen berücksichtigt und die Dämpfung sei vernachlässigt.

## I. Dielektrische Zylinder in einem unendlich ausgedehnten Plasma

Wir diskutieren nur die axialsymmetrische Tr H- (E)-Welle, bei der alle Größen von  $\varphi$  unabhängig sind, weil nur in diesem Fall die Tr H-Welle allein für

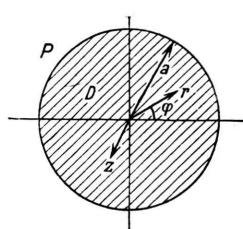


Abb. 1. D = Dielektrikum, P = Plasma.

sich existenzfähig ist (Abb. 1). Wie bekannt, treten bei Wellen höherer Ordnung mit  $\varphi$ -Abhängigkeit immer miteinander gekoppelte Tr H- und Tr E-Wellen gleichzeitig auf. Mit dem üblichen Ansatz  $\exp(j(\omega t - \alpha x))$  ( $\alpha$  Ausbreitungskonstante) ergeben sich für das Innere des Zylinders (Index D) Besselsche Funktionen 1. Art:

$$B_{\varphi D} = A_D J_0'(m_D r),$$

$$E_{rD} = A_D \frac{\alpha c^2}{\omega \epsilon_D} J_0'(m_D r),$$

$$E_{zD} = j \frac{m_D c^2}{\omega \epsilon_D} A_D J_0(m_D r)$$

mit

$$m_D^2 = k_D^2 - \alpha^2, \quad k_D^2 = \omega^2 \epsilon_D / c^2.$$

Das longitudinale  $E_z$ -Feld ist in der Zylinderachse am größten und nimmt nach dem Rande zu ab.

Im Außenraum, Plasma, (Index P), treten bei Vernachlässigung der Dämpfung Hankelsche Funktionen erster Art mit positiv imaginärem Argument,  $m_P = j m_P'$ ,  $m_P' > 0$ , auf, damit das Feld nach außen rasch genug, exponentiell, verschwindet.

<sup>1</sup> s. a. A. Sommerfeld, „Vorlesungen über Theoretische Physik“, Bd. III, Dieterich'sche Verlagsbuchhandlung, Wiesbaden, 1948, S. 185—190, und W. O. Schumann, „Elektrische Wellen“, Hanser-Verlag, München 1948, S. 261.



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

$$B_{\varphi P} = A_P H_0^{1/2}(j m_P' r), \quad E_{rP} = \frac{a c^2}{\omega \epsilon_P} A_P H_0^{1/2}(j m_P' r),$$

$$E_{zP} = -\frac{m_P'^2 c^2}{\omega \epsilon_P} A_P H_0^{1/2}(j m_P' r)$$

mit

$$m_P = 1, \quad \epsilon_P = 1 - \omega_0^2/\omega^2, \quad \omega_0^2 = N e^2/\epsilon_0 m,$$

$$m_P^2 = k_P^2 - a^2, \quad k_P^2 = \omega^2 \epsilon_P / c^2,$$

$$m_D^2 + m_P'^2 = \omega_0^2 / c^2 + \omega^2 (\epsilon_D - 1) / c^2.$$

Die Stetigkeitsbedingungen für  $B_\varphi$  und  $E_z$  bei  $r=a$  ergibt

$$m_D a \frac{J_0(m_D a)}{J_1(m_D a)} = j \frac{\epsilon_D}{\epsilon_P} m_P' a \frac{H_0^{1/2}(j m_P' a)}{H_1^{1/2}(j m_P' a)}. \quad (1)$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist reell. Bei positivem  $\epsilon_P$  ist sie negativ, bei negativem  $\epsilon_P$  positiv. In Abb. 5 sind die Funktionen  $\frac{x J_0(x)}{J_1(x)}$  und  $-jx \frac{H_0^{1/2}(jx)}{H_1^{1/2}(jx)}$  dargestellt.

a) Lösung für reelles  $m_D$ . Die linke Seite der Gleichung (1) ist für reelles  $m_D a$  ebenfalls reell und schwankt zwischen Null und Unendlich, entsprechend den mit wachsendem  $m_D a$  nacheinander auftretenden Wurzeln von  $J_0(x)$  und  $J_1(x)$ . Für  $m_D a \rightarrow 0$  geht sie gegen 2. Je zwei nebeneinanderliegende Gebiete zwischen zwei solchen Wurzeln haben entgegen-

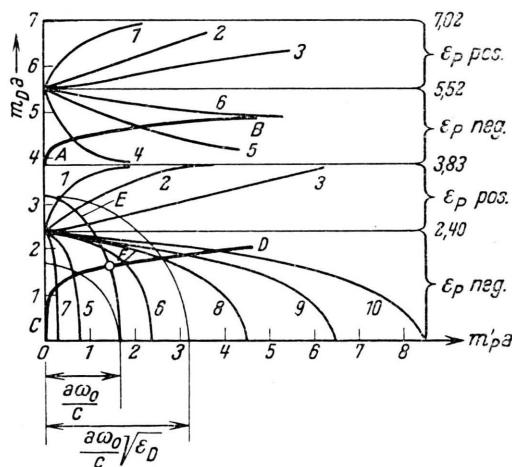


Abb. 2. Kurven AB, CD :  $a = 0$ .

Kurve	1	2	3
$\epsilon_P / \epsilon_D$	$1/s_0$	$1/4$	1

Kurve	4	5	6	7	8	9	10
$\epsilon_P' / \epsilon_D$	$1/s_0$	$1/4$	1	$1/30$	2	3	4

gesetztes Vorzeichen. Es gibt also Lösungen der Gl. (1) für positives und für negatives  $\epsilon_P$ , d.h.  $\omega > \omega_0$  und  $\omega < \omega_0$ . Die Verhältnisse liegen, ähnlich wie bei der Ausbreitung elektromagnetischer Wellen, längs dielektrischer Kreiszylinder. Nur daß hier wegen der Abhängigkeit des  $\epsilon_P$  von der Frequenz für jede Frequenz eine besondere Kurve existiert und daß hier wegen der Möglichkeit negativer  $\epsilon_P$  Frequenzgebiete existieren, die dort nicht möglich sind. Eine Darstellung des Zusammenhangs von  $m_D a$  und  $m_P' a$  gibt Abb. 2 für einige Werte des Verhältnisses  $\epsilon_P / \epsilon_D$  bzw.  $\epsilon_P' / \epsilon_D$ ,  $\epsilon_P' = -\epsilon_P = (\omega_0^2 / \omega^2) - 1$ . Die verschiedenen Bänder für positive und negative  $\epsilon_P$  zwischen zwei aufeinanderfolgenden Wurzeln von  $J_0$  und  $J_1$  sind angedeutet.

$$\text{Es ist für } \epsilon_P > 0 \text{ d.h. } 0 < \epsilon_P < 1, \omega > \omega_0, \\ \text{für } \epsilon_P < 0 \text{ d.h. } 0 < \epsilon_P' < \infty, \omega < \omega_0, \quad (2) \\ \omega^2 / \omega_0^2 = 1/(1 - \epsilon_P) = 1/(1 + \epsilon_P').$$

Wir betrachten weiterhin nur die beiden untersten Bänder der Abb. 2, weil die radialen Oberschwingungen keine praktische Bedeutung haben<sup>2</sup>.

Diese Kurven sind zu schneiden mit Kreisen vom Radius

$$(m_D a)^2 + (m_P' a)^2 = \frac{a^2 \omega^2}{c^2} (\epsilon_D - \epsilon_P) \quad (3) \\ = \frac{a \omega_0^2}{c^2} \frac{\epsilon_D - \epsilon_P}{1 - \epsilon_P} = \frac{a^2}{c^2} [\omega^2 (\epsilon_D - 1) + \omega_0^2].$$

Für  $\omega_0 = 0$  erhält man die bekannte Beziehung für einen dielektrischen Stab in Luft. Für  $\epsilon_D = 1$  wird der Kreisradius unabhängig von der Frequenz gleich  $a \omega_0 / c$ . Für positive  $\epsilon_P$  geht  $\omega$  von  $\omega_0$  bis  $\infty$ , der Kreisradius also von  $\frac{a}{c} \omega_0 \sqrt{\epsilon_D}$  bis  $\infty$ . Solange  $a \omega_0 \sqrt{\epsilon_D} / c > 2,40$  ist ( $\lambda_0$  Vakuumwellenlänge der Frequenz  $\omega_0$ ), ergeben alle Frequenzen  $\omega \geq \omega_0$  reelle Ausbreitung. Ist jedoch  $a \omega_0 \sqrt{\epsilon_D} / c < 2,40$ , d.h.  $2,40 c/a > \omega_0 \sqrt{\epsilon_D}$ , so existiert eine untere Grenzfrequenz  $\omega_{gu} = \sqrt{\frac{(2,4 c/a)^2 - \omega_0^2}{\epsilon_D - 1}}$ , die größer ist als  $\omega_0$ . Ist speziell  $2,4 c \sqrt{\epsilon_D} / a \omega_0 \gg 1$ , so liegt  $\omega_{gu}$  sehr nahe bei  $(2,4 c/a) / \sqrt{\epsilon_D} - 1$  und ist viel größer als  $\omega_0$ , nahezu wie beim dielektrischen Stab in Luft. Für  $\omega \rightarrow \infty$  geht die Phasengeschwindigkeit gegen  $v_p =$

<sup>2</sup> Über die Verteilung des Feldes. a) W. O. Schumann<sup>1</sup>, Elektrische Wellen, S. 217 u. 265; b) W. O. Schumann, S.-B. math.-naturwiss. Abt. bayr. Akad. Wiss. 1948, 255.

$c/\sqrt{\epsilon_D}$ , weil die Welle praktisch nur im Innern des dielektrischen Stabes verläuft. Mit abnehmendem  $\omega$  wächst die Phasengeschwindigkeit an bis zu einem Höchstwert bei der unteren Grenzfrequenz. Ist  $a \omega_0 \sqrt{\epsilon_D}/c > 2,40$ , so ist für  $\omega = \omega_0$ ,  $\epsilon_p = 0$ , d. h.  $a = m_p'$  und  $v_p = \omega/m_p'$ , um so größer, je kleiner das  $m_p'$  ist, das zu  $\omega = \omega_0$  gehört. Dieses  $m_p'$  ist Null für  $2,4 < a \omega_0 \sqrt{\epsilon_D}/c < 3,83$ . Ist  $a \omega_0 \sqrt{\epsilon_D}/c > 3,83$ , so wächst  $m_p'$  dauernd mit ihm an. Ist dagegen  $a \omega_0 \sqrt{\epsilon_D}/c < 2,40$ , so ist bei der unteren Grenzfrequenz  $m_p' = 0$ , d. h.  $a = \omega \sqrt{\epsilon_{P_u}}/c$  und  $v_p = c/\sqrt{\epsilon_{P_u}}$ , wo  $\epsilon_{P_u}$  der Wert der Dielektrizitätskonstanten des Plasmas ist, die zu der oben angegebenen Grenzfrequenz  $\omega_{g_u}$  gehört. Ist  $a \omega_0 \sqrt{\epsilon_D}/c = 2,40$ , so ist  $\epsilon_{P_u} = 0$  und  $v_p \rightarrow \infty$ , ist dagegen  $a \omega_0 \sqrt{\epsilon_D}/c \ll 2,40$ , so ist  $\epsilon_{P_u} \approx 1$  und  $v_p \sim c$ . Für positive  $\epsilon_p$  kommen von den  $(m_D a - m_p' a)$ -Kurven der Abb. 2 nur die vom Index  $\epsilon_p/\epsilon_D = 1/\epsilon_D$ , ( $\omega = \infty$ ,  $\epsilon_p = 1$ ), bis zum Index  $\epsilon_p/\epsilon_D = 0$  ( $\omega = \omega_0$ ,  $\epsilon_p = 0$ ) in Frage. Für  $\epsilon_D = 1$  und  $a \omega_0/c < 2,4$  ist überhaupt keine Ausbreitung mit  $\omega > \omega_0$  möglich.

Für negative  $\epsilon_p$  geht  $\omega$  von 0 bis  $\omega_0$ , und die Kreisradien liegen zwischen  $a \omega_0 / c$  ( $\omega = 0$ ) und  $a \omega_0 \sqrt{\epsilon_D} / c$  für  $\omega = \omega_0$ . In diesem Bereich kommen die  $(m_D a - m_p' a)$ -Kurven aller Indizes für eine mögliche Ausbreitung in Frage. Die Kurve 6 mit dem Index  $\epsilon_p' / \epsilon_D = 1$  schneidet die Abszissenachse bei  $m_p' a = 2,38$  und ist nahezu ein Kreis.

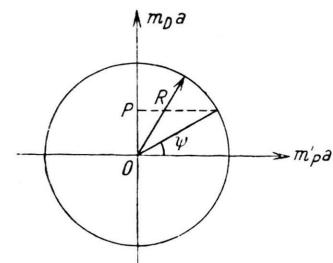
Da  $a \omega_0/c = 2 \pi c/\lambda_0$  häufig sehr klein gegen 1 ist, kommen in diesem Fall nach Abb. 2 nur die Kurven mit kleinem  $\varepsilon_p'/\varepsilon_D$  in Frage, d. h. mit  $\omega$  nahe an  $\omega_0$ , und der Wert  $\varepsilon_p'/\varepsilon_D = 1$ ,  $\omega = \omega_0/\sqrt{1 + \varepsilon_D}$  wird nicht erreicht.

Aus den Werten von  $m_D$   $a$  ergibt sich der Ausbreitungsfaktor  $\alpha$  zu  $\alpha^2 = k_D^2 - m_D^2 = \omega^2 \epsilon_D / c^2 - m_D^2$ . Für reelles  $\alpha$  muß also  $\omega \sqrt{\epsilon_D} / c > m_D$  sein. Für positives  $\epsilon_P$ ,  $\omega > \omega_0$ , ist das immer der Fall, da  $m_D a < a \omega \sqrt{\epsilon_D} / c$ , d. h.  $(a \omega_0 / c) \sqrt{\epsilon_D / (1 - \epsilon_P)}$  sein soll. Der Kreisradius ist  $(\sqrt{1 - \epsilon_P / \epsilon_D})$ -mal so groß, was für das übliche  $\epsilon_P / \epsilon_D < 1$ , kleiner als eins ist. Da nach der Kreiskonstruktion  $m_D a$  immer kleiner als der Kreisradius ist, ist es daher auch immer kleiner als die oben angegebene Grenze.

Dagegen braucht dies im Gebiet negativer  $\varepsilon_P$  nicht mehr zuzutreffen und führt zu einer Begrenzung des möglichen Frequenzbereichs. Aus den Werten für  $m$  und aus der Kreiskonstruktion (Abb. 3) folgt für  $a < 0$ ,

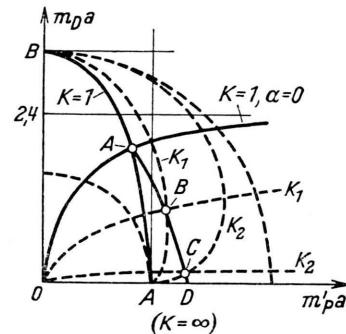
$$\operatorname{tg} \varphi = m_D a / m_{D'} a \leq \sqrt{\varepsilon_D / \varepsilon_{D'}}. \quad (4)$$

Setzt man  $m_D a / m_P' a = \sqrt{\varepsilon_D / k \varepsilon_P'}$ ,  $1 < k < \infty$ , (5)



$$\text{Abb. 3. } R = \frac{a \omega_0}{c} \sqrt{\frac{\varepsilon_D + \varepsilon_P'}{1 + \varepsilon_P'}}$$

$$OP = \frac{a \omega_0}{c} \sqrt{\frac{\varepsilon_D}{1 + \varepsilon_P}}.$$



$$\text{Abb. 4. } \text{OA} = a \omega_0 / c; \quad \text{OB} = a \omega_0 \sqrt{\varepsilon_D} / c.$$

und führt dies in Gl. (1) ein, so entsteht die Gleichung

$$\frac{1}{m_D a} \frac{J_0(m_D a)}{J_1(m_D a)} = j k \frac{1}{m_P' a} \frac{H_0^{-1}(j m_P' a)}{H_1^{-1}(j m_P' a)}, \quad (6)$$

die für jedes  $k$  eine  $(m_D a - m_{D'} a)$ -Kurve ergibt. Speziell für  $k = 1$  ergeben sich die Grenzkurven für  $a = 0$ , AB und CD, der Abb. 2. Alle möglichen Ausbreitungs-  
zustände liegen unter dieser Kurve. Setzt man Gl. (5) in die Gl. (3) der Kreisscharen für  $\varepsilon_P < 0$ ,  $\varepsilon_{P'} > 0$  ein, so ergibt sich die Gleichung

$$\begin{aligned} & [(m_D a)^2 + (m_P' a)^2] \left[ (m_D a)^2 + \frac{\epsilon_D}{k} (m_P' a)^2 \right] \\ &= \frac{a^2}{c^2} \omega_0^2 \epsilon_D \left[ (m_D a)^2 + \frac{1}{k} (m_P' a)^2 \right], \quad (7) \end{aligned}$$

die für  $k = 1$  in die Ellipsengleichung

$$\frac{(m_D a)^2}{a^2 \omega_0^2 \varepsilon_D / c^2} + \frac{(m_{P'} a)^2}{a^2 \omega_0^2 / c^2} = 1 \quad (8)$$

übergeht. Diese Ellipse mit den Achsen  $a\omega_0/\sqrt{E/c}$  und  $a\omega_0/c$  ist in Abb. 2 mit E eingezeichnet. Ihr Schnittpunkt F mit der Kurve CD gibt die eine

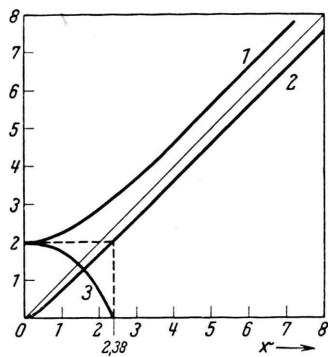
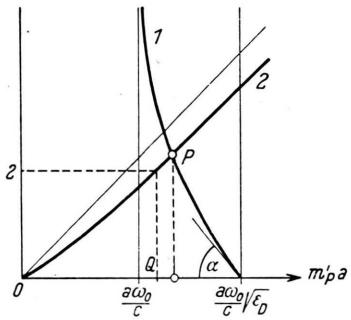


Abb. 5.

Kurve	1	2	3
	$j x \frac{J_0(j x)}{J_1(j x)}$	$-j x \frac{H_0^1(j x)}{H_1^1(j x)}$	$x \frac{J_0(x)}{J_1(x)}$



$$\text{Abb. 6. Kurve 1: } \frac{2 - a^2 \omega_0^2 \epsilon_D / c^2 - (m_p'a)^2}{\epsilon_D (m_p'a)^2 - a^2 \omega_0^2 / c^2};$$

$$\text{Kurve 2: } -j m_p'a \frac{H_0^1(j m_p'a)}{H_1^1(j m_p'a)}.$$

$$\tan \alpha = -\frac{4}{\sqrt{\epsilon_D}} \frac{1}{a \omega_0 / c} \frac{1}{\epsilon_D - 1};$$

$$\text{Punkt Q: } \epsilon_p' = \epsilon_D; \quad OQ = 2,38.$$

Grenzfrequenz  $\omega_{g1}$  an, deren Größe durch den Index  $\epsilon_p'/\epsilon_D$  der durch diesen Punkt gehenden  $(m_D a - m_p'a)$ -Kurve der Gl. (1) gegeben ist.

Für andere  $k$  erhält man nach Gl. (7) Kurven 4. Grades, die in Abb. 4 skizziert sind und die zwischen den beiden Kreisen verlaufen. Bringt man diese Kurven zum Schnitt mit den  $(m_D a - m_p'a)$ -Kurven nach Gl. (6), wie es in Abb. 4 geschehen ist, so erhält man z. B. die Schnittpunkte A, B, C und D. Die durch diese Punkte gehenden  $(m_D a - m_p'a)$ -Kurven der Abb. 2 nach Gl. (1) bestimmen die zugehörigen Fre-

quenzen. Punkt A mit  $k = 1$  gibt die eine Grenzfrequenz  $\omega_{g1}$  mit  $\alpha = 0$ ,  $v_p = \infty$ ,  $\lambda = \infty$ . Der letzte der Punkte, D, mit  $k \rightarrow \infty$ ,  $m_D a \rightarrow 0$ , gibt die andere Grenzfrequenz  $\omega_{g2}$  mit  $v_p = c/\sqrt{\epsilon_D}$ . Auf diese Weise ist ein bestimmtes Frequenzband definiert, das sich längs des Zylinders ausbreitet.

Die Grenzfrequenz  $\omega_{g2}$  für  $m_D a = 0$  ergibt sich aus Gl. (1) durch

$$-j m_p'a \frac{H_0^1(j m_p'a)}{H_1^1(j m_p'a)} = \frac{2 \epsilon_p'}{\epsilon_D}, \quad (9)$$

während andererseits aus der Kreisgleichung für  $m_D = 0$  folgt:

$$(m_p'a)^2 = \frac{a \omega_0^2}{c^2} \frac{\epsilon_D + \epsilon_p'}{1 + \epsilon_p'}$$

$$\text{oder } \epsilon_p' = \frac{a^2 \omega_0^2 \epsilon_D / c^2 - (m_p'a)^2}{(m_p'a)^2 - a^2 \omega_0^2 / c^2},$$

so daß

$$-j m_p'a \frac{H_0^1(j m_p'a)}{H_1^1(j m_p'a)} = \frac{2}{\epsilon_D} \frac{a^2 \omega_0^2 \epsilon_D / c^2 - (m_p'a)^2}{(m_p'a)^2 - a^2 \omega_0^2 / c^2}$$

sein muß.

Die linke Seite dieser Gleichung ist in Abb. 5 und in Abb. 6, Kurve 2, dargestellt. Die rechte Seite in Abb. 6 als Kurve 1.

Der Schnittpunkt P beider Kurven bestimmt  $m_p'a$  für  $m_D a = 0$  und damit den Wert von  $\epsilon_p'$  und der Grenzfrequenz  $\omega_{g2}^2 = (c^2 m_p'^2 - \omega_0^2)/(\epsilon_D - 1)$ . Je kleiner  $a \omega_0 / c$  ist, desto steiler steigt die Kurve 1 an, d. h. um so näher liegt  $m_p'a$  an  $a \omega_0 / \sqrt{\epsilon_D} / c$ , d. h.,  $\omega_{g2}$  an  $\omega_0$ . Umgekehrt ergibt großes  $a \omega_0 / c$  ein  $m_p'a$  näher an  $a \omega_0 / c$ , d. h.  $\omega_{g2}$  nahe Null. Für  $\epsilon_p' = \epsilon_D$ ,  $\omega = \omega_0 / \sqrt{1 + \epsilon_D}$  (Punkt Q der Abb. 6) ist  $m_p'a = (a \omega_0 / c) / \sqrt{2 \epsilon_D / (1 + \epsilon_D)} = 2,38$ , d. h.  $a \omega_0 / c = 2,38 / (1 + \epsilon_D) / \sqrt{2 \epsilon_D}$ . Alle Frequenzen liegen natürlich unter dem Wert  $\omega_0$ . Analoge Frequenzabhängigkeiten von  $a \omega_0 / c$  ergeben sich auch für  $\epsilon_D = 1$ , wo  $m_p'a = a \omega_0 / c$  ist, und die zugehörige Ordinate der Kurve 2, Abb. 6, nach Gl. (9) den Wert von  $2 \epsilon_p' / \epsilon_D$  ergibt.

Aus Abbildung 6 und Abbildung 2 sieht man, daß bei  $a \omega_0 / c \sqrt{\frac{2 \epsilon_D}{1 + \epsilon_D}} > 2,38$ ,  $\omega_{g1} < \omega_{g2}$  ist, bei kleinerem  $a \omega_0 / c \sqrt{\frac{2 \epsilon_D}{1 + \epsilon_D}}$  dagegen  $\omega_{g1} > \omega_{g2}$  ist. Die Grenze zwischen beiden Gebieten liegt etwa bei  $\frac{a \omega_0}{c} \sqrt{\frac{2 \epsilon_D}{1 + \epsilon_D}} \approx 2,38$ , wo  $\omega_{g1}$  und  $\omega_{g2}$  sehr nahe beieinanderliegen, wo also schon eine kleine Frequenzänderung eine starke Änderung der Wellenlängen und der Phasen-

geschwindigkeiten hervorruft. Bei großem  $a\omega_0/c$  nimmt die Phasengeschwindigkeit mit wachsender Frequenz ab, bei kleinem  $a\omega_0/c$  dagegen zu.

b) Lösung für imaginäre  $m_D$ . In diesem Fall ist, im Gegensatz zu a), das longitudinale elektrische Feld in der Stabachse am kleinsten und nimmt nach außen hin zu. Setzt man  $m_D = jm_D'$ , d. h. sind die Felder in dem dielektrischen Stab nach imaginären Bessel-Funktionen 1. Art verteilt, so wird aus Gl. (1):

$$jm_D' a \frac{J_0(jm_D' a)}{J_1(jm_D' a)} = j \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_P'} m_P' a \frac{H_0^1(jm_P' a)}{H_1^1(jm_P' a)}. \quad (10)$$

Während die rechte Seite bei positivem  $\varepsilon_P'$  negativ reell ist, ist die linke Seite positiv reell. Die Gl. (10) ist also nur für negatives  $\varepsilon_P'$  lösbar,  $\omega < \omega_0$ ,  $\varepsilon_P' = -\varepsilon_P$ ,  $0 < \varepsilon_P' < \infty$ . Abb. 5 gibt den Verlauf von  $jx J_0(jx)/J_1(jx)$  und von  $-jH_0^1(jx)/H_1^1(jx)$ . Abb. 7 zeigt, daraus abgeleitet, den Verlauf der  $(m_D' a - m_P' a)$ -Kurven für verschiedene  $\varepsilon_D/\varepsilon_P'$ . Die Kurve mit  $\varepsilon_D/\varepsilon_P' = 1$  schneidet die Abszissenachse im Punkte P mit  $m_P' a = 2,38$  (s. a. Abb. 5). Jede dieser Kurven strebt für große Argumentwerte der Asymptote  $m_D' a = \varepsilon_D m_P' a / \varepsilon_P'$  zu. Diese Kurven sind jetzt zu schneiden mit gleichseitigen Hyperbeln [s. Gl. (3)].

$$(m_P' a)^2 - (m_D' a)^2 = \frac{a^2 \omega^2}{c^2} (\varepsilon_D + \varepsilon_P') \\ = \frac{a \omega_0^2}{c^2} \frac{\varepsilon_D + \varepsilon_P'}{1 + \varepsilon_P'} = \frac{a^2 \omega_0^2}{c^2} \frac{\omega_0^2 + \omega^2 (\varepsilon_D - 1)}{\omega_0^2}. \quad (10a)$$

Das Achsenkreuz dieser Hyperbeln variiert wieder mit  $\varepsilon_P'$  bzw. der Frequenz zwischen  $a\omega_0/\sqrt{\varepsilon_D/c}$  für  $\varepsilon_P' = 0$ ,  $\omega = \omega_0$  und  $a\omega_0/c$  für  $\varepsilon_P' \rightarrow \infty$ ,  $\omega \rightarrow 0$ . Für  $\varepsilon_D = 1$  wird daraus eine einzige Hyperbel mit den Achsen  $a\omega_0/c$ . Da jede dieser Hyperbeln als Asymptote  $m_D' a = m_P' a$  hat, und die  $(m_D' a - m_P' a)$ -Kurve für  $\varepsilon_D/\varepsilon_P' = 1$  ebenfalls, ist immer für  $m_D' a \rightarrow \infty$  und  $m_P' a \rightarrow \infty$  die Lösung  $\varepsilon_P' = \varepsilon_D$ ,  $\omega/\omega_0 = 1/\sqrt{\varepsilon_D + 1}$  möglich, mit  $a \rightarrow \infty$ ,  $v_P = 0$ . Der sonstige Verlauf hängt stark von der Größe von  $a\omega_0/c$  und von  $\varepsilon_D$  ab und ist aus Abb. 6 und 7 abzulesen. Für große  $a\omega_0/c$  und große  $\varepsilon_D$  z. B. erscheint  $\omega_0/\sqrt{1 + \varepsilon_D}$  als obere Grenzfrequenz und eine darunter gelegene als untere. Umgekehrt kann bei kleinem  $a\omega_0/c$  und  $\varepsilon_D$  nahe an 1,  $\omega_0/\sqrt{1 + \varepsilon_D}$  auch als untere Grenzfrequenz erscheinen und eine höher gelegene als obere. Es sind aber auch Fälle denkbar, wo die obere Grenzfrequenz über und die untere unter  $\omega_0/\sqrt{1 + \varepsilon_D}$  liegt. In Abb. 7 sind als Beispiel 2 Paare der Grenzhyperbeln  $H_1$ ,  $H_2$  und  $H_3$ ,

$H_4$  mit  $\varepsilon_D = 4$  bzw. 2,45 für 2 verschiedene  $\omega_0/a/c$  (0,55 und 3,9) eingezeichnet, zwischen denen jeweils sämtliche anderen Hyperbeln liegen.  $H_5$  ist die Hyperbel für  $a\omega_0/c = 3,9$ ,  $\varepsilon_P' = \varepsilon_D = 2,45$ ,  $\varepsilon_P'/\varepsilon_D = 1$ .  $H_6$  ist die Hyperbel mit der Achse 2,38 und  $a\omega_0/c = 2,38 \sqrt{(1 + \varepsilon_D)/2\varepsilon_D}$ . Hyperbeln mit größerer Achse können u. U. die  $(m_D' a - m_P' a)$ -Kurve mit  $\varepsilon_P'/\varepsilon_D = 1$  2-mal schneiden, einmal im Endlichen und einmal im Unendlichen.

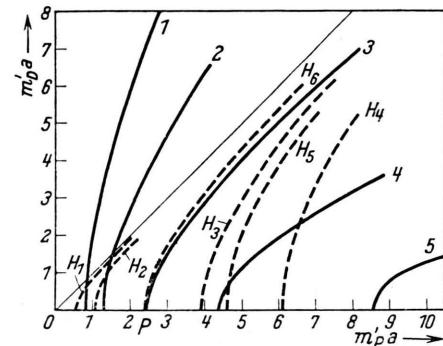


Abb. 7.

Kurve	1	2	3	4	5
$\varepsilon_D/\varepsilon_P'$	4	2	1	$1/2$	$1/4$

Kurve	$H_1$	$H_2$	$H_3$	$H_4$	$H_5$	$H_6$
$a\omega_0/c$	0,55	0,55	3,9	3,9	3,9	$2,38 \sqrt{\frac{1 + \varepsilon_D}{2\varepsilon_D}}$
$\varepsilon_D$	4	4	2,45	2,45	$\varepsilon_P'$	$\varepsilon_P'$

Sucht man die Hyperbelschar, für die die „obere“ und „untere“ Grenzfrequenz identisch sind, so muß die Hyperbel der Schar, für die  $\varepsilon_P' = \varepsilon_D$ ,  $\omega^2 = \omega_0^2/(1 + \varepsilon_D)$  ist, durch diesen Punkt 2,38 (P der Abb. 7) der Abszissenachse hindurchgehen. Dies ist nach Gl. (10a) dann der Fall, wenn  $a\omega_0/c = 2,38 \sqrt{(1 + \varepsilon_D)/2\varepsilon_D}$  ist. Dann ist die obere und die untere Grenzfrequenz gleich  $\omega_0/\sqrt{1 + \varepsilon_D}$ , und dazwischen treten nur leichte Frequenzabweichungen nach oben auf. Es gehören aber dazu sehr starke Änderungen der Wellenlänge, der Phasengeschwindigkeit und der Wellengestalt.

Für genügend große  $m_D' a$  und  $m_P' a$  in der Nähe der  $45^\circ$ -Asymptote haben wir eine typische Grenzflächenwelle mit  $\varepsilon_P'/\varepsilon_D = 1$ , mit starkem Skineffekt ins Innere der beiden Medien hinein und mit sehr geringer Phasengeschwindigkeit.

Da  $a\omega_0/c = a2\pi/\lambda_0$  in vielen Fällen klein gegen 1 ist, kommen in diesen Fällen nur Hyperbeln

mit kleinen Achsen in Frage. Die Frequenzen liegen dann zwischen  $\sim \omega_0 / \sqrt{\epsilon_D + 1}$  und  $\omega_0$ . Die Phasengeschwindigkeit wächst mit der Frequenz von 0 bis auf  $c / \sqrt{\epsilon_D}$ . Da jetzt  $a^2 = \omega^2 \epsilon_D / c^2 + m_D'^2$  ist, folgt, daß immer  $a > \omega / \sqrt{\epsilon_D} / c$ , d. h. die Phasengeschwindigkeit ist immer kleiner als die von freien Wellen im Dielektrikum. Mit wachsendem  $m_D'$  nimmt sie immer mehr ab und geht gegen Null mit  $m_D' \rightarrow \infty$ . Der Wert  $a \rightarrow \infty$ ,  $v_P \rightarrow 0$  tritt immer bei der Frequenz  $\epsilon_D / \epsilon_P' = 1$ ,  $\omega = \omega_0 / \sqrt{1 + \epsilon_D}$ , auf. Der Wert  $m_D' = 0$  wird nach Abb. 7, je nach der Lage der Hyperbeln, bei Frequenzen erreicht, die kleiner oder größer als diese Frequenz sind. Ist  $a \omega_0 / c > 2,38 \sqrt{(\epsilon_D + 1) / 2 \epsilon_D}$ , so tritt  $m_D' = 0$  bei  $\omega < \omega_0 / \sqrt{\epsilon_D + 1}$  auf; ist dagegen  $a \omega_0 / c < 2,38 \sqrt{(\epsilon_D + 1) / 2 \epsilon_D}$ , so tritt  $m_D' = 0$  bei  $\omega > \omega_0 / \sqrt{\epsilon_D + 1}$  auf.

Man hat also bei  $\omega = \omega_0 / \sqrt{\epsilon_D + 1}$  den Wert  $v_P = 0$  und bei größeren oder kleineren Frequenzen ein Ansteigen auf  $v_P = c / \sqrt{\epsilon_D}$ . Daraus folgt, daß im ersten Fall im Gebiet  $\omega < \omega_0$  ein Abfall der Phasengeschwindigkeit mit steigender Frequenz stattfindet, während im zweiten Fall für  $\omega > \omega_0$  ein Anwachsen der Phasengeschwindigkeit mit der Frequenz stattfindet. Für die Bestimmung der unteren Grenzfrequenz gelten wieder Abb. 6 und die dort abgeleiteten Beziehungen.

Durch diese Eigenschaften ist dieser Wellentyp mit negativem  $\epsilon_P$  prinzipiell unterschieden, von dem analogen Wellentyp mit positivem  $\epsilon_P$  des vorhergehenden Abschnitts.

c) Longitudinale  $H(\text{Tr E})$ -Wellen. Für den zweiten möglichen Wellentyp der Ordnung Null ohne  $\varphi$ -Abhängigkeit, die magnetische longitudinale  $(\text{Tr E})$ -Welle mit  $E_\varphi$ ,  $H_r$  und  $H_z$  ergibt sich statt der Stetigkeitsbedingung von Gl. (1)

$$\frac{m_D a J_0(m_d a)}{J_1(m_d a)} = \frac{\epsilon_D'' j m_P' a}{\epsilon_P''} \frac{H_0^1(j m_P' a)}{H_1^1(j m_P' a)}. \quad (11)$$

Verglichen mit Gl. (1) und  $\mu_D = \mu_P = 1$  gesetzt, ergibt sich jetzt für alle Frequenzen nur eine einzige  $(m_d a - m_P' a)$ -Kurve, nämlich die für  $\epsilon_P = \epsilon_D$ , und es sind nur die Kurven der Abb. 2 mit positivem  $\epsilon_P$  möglich, also vor allem keine Grenzflächenwellen mit negativem  $\epsilon_P$ .

## II. Plasmakreiszylinder in Luftatmosphäre

Dieser Fall stellt die Umkehrung des Abschnitts I dar, indem Plasma und Dielektrikum vertauscht sind.

Im Plasmazylinder gilt jetzt

$$B_{\varphi P} = A_P J_0'(m_P r), \quad E_{rP} = \frac{\alpha c^2}{\omega \epsilon_P} A_P J_0'(m_P r),$$

$$E_{zP} = j \frac{m_P c^2}{\omega \epsilon_P} A_P J_0(m_P r)$$

und im umgebenden Dielektrikum

$$B_{\varphi D} = A_D H_0^{1\prime}(m_D r), \quad E_{rD} = \frac{\alpha c^2}{\omega \epsilon_D} A_D H_0^{1\prime}(m_D r)$$

$$E_{zD} = j \frac{m_D c^2}{\omega \epsilon_D} A_D H_0^1(m_D r).$$

Da wieder  $m^2 = k^2 - a^2$  ist,  $k^2 = \omega^2 \epsilon / c^2$ , ist

$$m_P'^2 - m_D'^2 = \omega^2 (\epsilon_P - \epsilon_D) / c^2 = (\omega^2 / c^2) (1 - \epsilon_D) - \omega_0^2 / c^2.$$

Da  $m_D$  positiv imaginär sein muß, damit das Feld nach außen exponentiell abfällt,  $m_D = j m_D'$ , gilt

$$m_P'^2 - m_D'^2 = -\omega_0^2 / c^2 + (\omega^2 / c^2) (1 - \epsilon_D).$$

Da  $\epsilon_D \geq 1$ , ist die rechte Seite stets negativ und eine Lösung nur für imaginäres  $m_P = j m_P'$  möglich mit

$$m_P'^2 - m_D'^2 = \omega_0^2 / c^2 + (\omega^2 / c^2) (\epsilon_D - 1), \quad (12)$$

wobei  $m_P' > m_D'$  ist.

Die Stetigkeit von  $B_\varphi$  und  $E_z$  für  $r = a$  ergibt

$$\frac{j m_P' a J_0(j m_P' a)}{J_1(j m_P' a)} = \frac{\epsilon_P}{\epsilon_D} \frac{j m_D' a H_0^1(j m_D' a)}{H_1^1(j m_D' a)}. \quad (13)$$

Diese Gleichung ist das Analogon zu Gl. (10), wenn man dort  $m_D'$  mit  $m_P'$  vertauscht und  $\epsilon_P$  mit  $\epsilon_D$ . Sie ist wiederum nur für negative  $\epsilon_P$  lösbar,  $\epsilon_P' = -\epsilon_P = \omega_0^2 / \omega^2 - 1$ , d. h. für  $\omega < \omega_0$ , wobei  $0 < \epsilon_P' < \infty$ . Es gelten wiederum die Kurven Abb. 5 und Abb. 7, wobei in Abb. 7 als Index bei den  $(m_d a - m_P' a)$ -Kurven der Gl. (13) statt  $\epsilon_D / \epsilon_P'$  jetzt  $\epsilon_P' / \epsilon_D$  zu schreiben ist und Ordinate und Abszisse zu vertauschen sind. Abb. 8 zeigt die abgeänderte Abb. 7. Es sind zwei Grenzhyperbeln nach Gl. (12) eingezeichnet, mit den Achsen  $\omega_0 a / c$  [für  $\omega = 0$ ] und  $\omega_0 a / \sqrt{\epsilon_D / c}$  [für  $\omega = \omega_0$ ]. Die Schnitte mit den Kurven nach Gl. (13) gleicher Frequenz ergeben wieder  $m_P'$ ,  $m_D'$  und damit  $\alpha$ ,  $v_P$  und die Verteilung der Felder. Da die Asymptoten der  $(m_P' a - m_D' a)$ -Kurven nach Gl. (13) durch  $m_D' a = m_P' a \epsilon_D / \epsilon_P'$  gegeben sind und die Asymptoten der Hyperbeln durch  $m_P' a = m_D' a$ , gibt es nur Lösungen für  $\epsilon_P' / \epsilon_D \leq 1$ , das heißt  $\omega \leq \omega_0 / \sqrt{1 + \epsilon_D}$ . Im asymptotischen Grenzfall wird

$m_D'$  und  $m_D$  sehr groß, also auch  $a^2 = \omega^2 \epsilon_D / c^2 + m_D'^2$ , d. h. die Phasengeschwindigkeit  $v_P = \omega/a$  geht gegen Null. Mit abnehmendem  $\omega$ , wachsendem  $\epsilon_P'$ , nehmen  $m_P'$  und  $m_D'$  ab und ebenso  $\alpha$ , wobei  $v_P$  anwächst. Bei  $\omega \rightarrow 0$  geht  $m_D' \rightarrow 0$ , es wird  $a^2 = \omega^2 \epsilon_D / c^2$  und  $v_P = c / \sqrt{\epsilon_D}$ , gleich der Geschwindigkeit freier Wellen im umgebenden Dielektrikum<sup>2b</sup>. Es herrscht also mit wachsender Frequenz ein wachsender Skin-Effekt ins Innere der beiden Medien hinein, die Welle konzentriert sich immer stärker in der unmittelbaren Umgebung der Grenzfläche. Die Wellenlänge ist gegeben durch  $\lambda = 2\pi/a = 1/\sqrt{\omega^2 \epsilon_D / c^2 + m_D'^2}$ , wobei für die Grenzflächenwelle  $m_D' \rightarrow \infty$  geht.

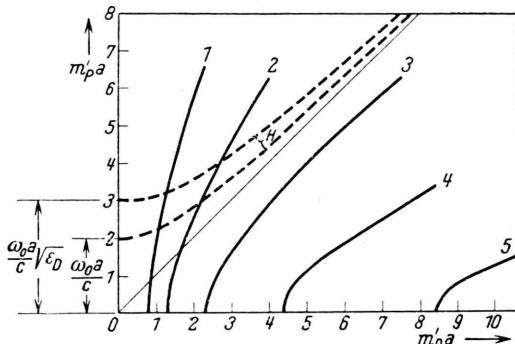


Abb. 8. Grenzhyperbeln nach Gl. 12.

Kurve	1	2	3	4	5
$\epsilon_P'/\epsilon_D$	4	2	1	$1/2$	$1/4$

### III. Stehende Wellen (Eigenschwingungen) zwischen zwei zur Zylinderachse senkrechten, unendlich großen und gut leitenden Wänden

Denkt man sich die besprochenen Zylinder an zwei Stellen im Abstand  $l$  von  $\infty$  großen, zur  $z$ -Achse senkrechten, unendlich gut leitenden Wänden begrenzt, so kommen stehende Wellen zustande, die Eigenschwingungen des betreffenden Gebildes. An diesen Wänden muß  $E_x = 0$  sein, woraus  $\alpha l = k\pi$  bzw.  $l = k\lambda/2$  folgt. ( $k$  ganze Zahl, 1, 2, 3 ...,  $\lambda$  Wellenlänge).

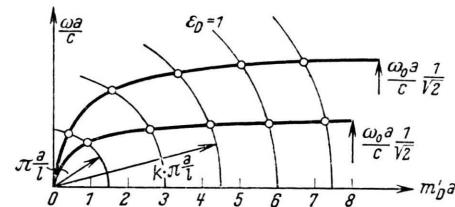
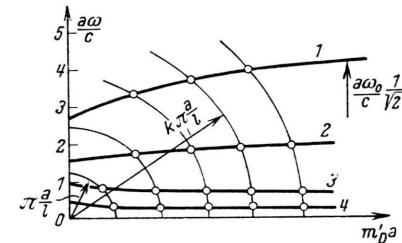
Für den Fall II des Plasmazylinders ist  $m_D'^2 = a^2 - \omega^2 \epsilon_D / c^2$ ,

$$(m_D' a)^2 + (\omega a \sqrt{\epsilon_D} / c)^2 = (a k \pi / l)^2. \quad (14)$$

Leitet man aus Abb. 8 für die verschiedenen Hyperbeln Kurven für  $\omega a \sqrt{\epsilon_D} / c$  als Funktion von  $m_D' a$  ab, so sind diese Kurven mit Kreisen vom

Radius  $a k \pi / l$  zu schneiden, um die Eigenfrequenz  $\omega_{ei}$  zu erhalten.

In Abb. 9 sind für  $\epsilon_D = 1$  für zwei Werte von  $\omega_0 a / c$  Kurven von  $\omega a / c$  als Funktion von  $m_D' a$  abgeleitet, die sich asymptotisch den Werten  $\omega_0 a / \sqrt{2} c$  nähern. Die Schnitte mit den Kreisen vom Radius  $k \pi a / l$  ergeben die gesuchten Eigenfrequenzen. Das Verhältnis der Grundkreisradien  $a \pi / l$  zur Grenzfrequenz  $\omega_0 a / \sqrt{2} c$  ist  $\lambda_0 / \sqrt{2} l$ , wenn  $\lambda_0$  die Vakuumwellenlänge der Frequenz  $\omega_0$  ist. In nicht zu dichten Plasmen ist deshalb der Grundkreisradius ziemlich

Abb. 9. Eigenfrequenzen eines Plasmazylinders der Länge  $l$ .

Kurve	1	2	3	4
$a \omega_0 / c$	6	2,38	1	0,5

Abb. 10. Eigenfrequenzen eines dielektrischen Zylinders in einer Plasmaatmosphäre mit  $\omega < \omega_0$ ,  $m_D$  imaginär.

groß gegen die Endordinate  $\omega_0 a / \sqrt{2} c$  der Frequenzkurve. Die einzelnen Oberschwingungen sind nicht harmonisch und ihre Frequenz steigt sehr langsam mit  $m_D' a$  und mit der Ordnungszahl an. Der physikalische Grund liegt darin, daß infolge des starken Anwachsens von  $m_D'$  mit der Frequenz, die Phasengeschwindigkeit sehr stark abnimmt, so daß mit nur gering anwachsender Frequenz immer mehr Wellenlängen auf der Strecke  $l$  untergebracht werden können.

Betrachtet man nun die in Abschn. Ib beschriebenen Schwingungen eines dielektrischen Zylinders in Plasmaatmosphäre für imaginäres  $m_P$  und  $m_D$ , so gelten dieselben Überlegungen. In Abb. 10 sind die aus Abb. 7 abgeleiteten Kurven  $a \omega / c$  als Funktion von  $m_D' a$  für  $\epsilon_D = 1$  gezeichnet. Wie schon dort erwähnt, verlaufen die Kurven verschieden, je

nachdem, ob  $a\omega_0/c \leq 2,38 \sqrt{(\epsilon_D + 1)/2\epsilon_D}$  ist. Für  $a\omega_0/c > 2,38 \sqrt{(\epsilon_D + 1)/2\epsilon_D}$  verlaufen die Kurven ähnlich wie in Abb. 9, nur daß sie für  $m_D' = 0$  mit einem endlichen  $\omega$  endigen. Daraus folgt, daß es u. U. bei kleinem  $\pi a/l$  Kreise gibt, die diese Kurven nicht schneiden, d. h. daß es Anordnungen gibt, wo die Grundschwingungen und einige darauf folgende Oberschwingungen gar nicht möglich sind, sondern wo der niedrigste mögliche Schwingungszustand schon einige Wellen längs  $l$  umfaßt. Liegt  $a\omega_0/c$  nahe 2,38, so ändert sich die Frequenz sehr wenig mit  $m_D'$ , so daß ein sehr schmales Frequenzband alle Eigenschwingungen enthält. Liegt schließlich  $a\omega_0/c$  unter  $2,38 \sqrt{(\epsilon_D + 1)/2\epsilon_D}$ , so nimmt die Frequenz  $\omega$  mit  $m_D'$  ab, und die „Oberwellen“ mit größerem  $k$  liegen bei kleineren Frequenzen, als die Grundwelle mit  $k = 1$ . Dieses paradoxe Ergebnis erklärt sich aus dem am Ende von Abschn. Ib Gesagten, daß in diesem Fall, wo die möglichen Frequenzen zwischen  $\omega_0$  und  $\omega_0/\sqrt{1 + \epsilon_D}$  liegen, mit steigender Frequenz die Phasengeschwindigkeit so rasch anwächst, daß mit geringerer Frequenz mehr Wellenlängen auf der Strecke  $l$  untergebracht werden können, als mit höheren. Für zwei verschiedene Frequenzwerte 1 und 2 ist  $\lambda_1/\lambda_2 = a_2/a_1 = \omega_2/\omega_1 \cdot v_1/v_2$ . Ist  $v_1 = v_2$ , so verhalten sich, wie üblich, die Wellenlängen umgekehrt wie die Frequenzen. Ist jedoch  $v_2/v_1 > \omega_2/\omega_1$ , wenn  $\omega_2$  die höhere Frequenz ist, also  $\omega_2 v_1 / \omega_1 v_2 < 1$ , so ist  $\lambda_1/\lambda_2 < 1$ , d. h. die Wellenlänge bei der höheren Frequenz ist größer als die bei niedriger. In all diesen Fällen ist der Kraftlinientyp von der Art der Grenzschichtwelle, d. h. das Feld ist mehr oder weniger in der Umgebung der Grenze Zylinder-Dielektrikum konzentriert. Ins Innere der beiden Medien hinein nimmt das Feld ab.

Im Gegensatz hierzu haben wir im Falle Ia des dielektrischen Zylinders in Plasmaatmosphäre mit reellem  $m_D$ , in der Zylinderachse ein rein longitudinales elektrisches Feld, das nach außen zu abnimmt. In diesem Falle gilt

$$m_D^{-2} = \omega^2 \varepsilon_D / c^2 - a^2 = \omega^2 \varepsilon_D / c^2 - (k \pi / l)^2, \quad (15)$$

d. h. wir haben jetzt die  $(a\omega \sqrt{\epsilon_D}/c)$ -Kurven als Funktion von  $m_D a$  mit Hyperbeln zum Schnitt zu bringen, deren Achsen  $k a \pi / c$  sind. Da meist  $a\omega_0/c$  klein gegen  $k$  ist, erhält man als Eigenschwingungen für positive  $\epsilon_P$  (Abb. 2) sehr angenähert die gleichen Werte, als ob sich der dielektrische Zylinder in Luft befände, wenn  $\epsilon_D$  nicht zu nahe an 1 ist.

Für negative  $\varepsilon_P$  zeigt Abb. 11 schematisch den Verlauf. Solange  $a\omega_0 \sqrt{\varepsilon_D/c} < 2,40$  ist, ist der höchste mögliche Wert von  $m_D a$  gleich diesem Wert, und der zugehörige Frequenzwert (für  $m_P' a = 0$ ) ist  $\omega_0$ . Mit abnehmendem  $m_D a$  (wachsendem  $m_P' a$ ) nimmt  $\omega$  längs der Kreise ab, bis zu einem Mindestwert bei  $m_D a = 0$ .

Es sind in Abb. 11 2 Hyperbeln mit den Achsen  $\pi l/a$  und  $2\pi l/a$  eingezeichnet, deren Schnittpunkte A, B mit der  $(a\omega_0\sqrt{\varepsilon_D}/c)$ -Kurve die betreffenden Eigenschwingungen ergeben. Man sieht, daß nur eine beschränkte Zahl von Oberschwingungen mög-

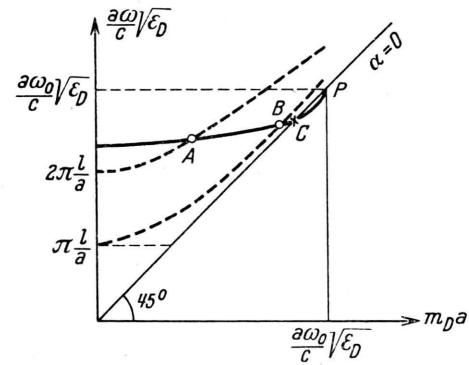


Abb. 11. Eigenfrequenzen eines dielektrischen Zylinders in einer Plasmaatmosphäre,  $m_D$  reell,  $\omega < \omega_0$ .  
 $a \omega_0 \sqrt{\epsilon_D} / c < 2,40$ .

lich ist, und u. U. überhaupt keine, wenn  $\pi l/a$  größer ist als die Ordinate des Schnittpunktes der  $(a\omega_0\sqrt{\epsilon_D}/c)$ -Kurve mit der Ordinatenachse. Auch hier tritt das im vorigen Abschnitt erwähnte Paradoxon auf, daß wachsende räumliche Wellenzahl mit abnehmender Frequenz verbunden ist. Ist  $a\omega_0\sqrt{\epsilon_D}/c$  klein gegen 2,40, so liegen alle Eigenschwingungen nahe an  $\omega_0$ . Da in diesem Fall auch der Wert  $a = 0$  auftreten kann, ist hier auch die Grundschwingung der Ordnung 0 möglich, bei der  $E_r$  verschwindet und die elektrischen Kraftlinien rein parallel zur Zylinderachse verlaufen, während die magnetischen in Kreisen um die Achse verlaufen. Da für  $a = 0$ ,  $m_D a = \omega a\sqrt{\epsilon_D}/c$  ist, sind dies in Abb. 11 die Schnittpunkte C mit der  $45^\circ$ -Geraden. Diese Schwingungen sind von  $l$  unabhängig und sind für  $a\omega_0\sqrt{\epsilon_D}/c \leq 2,40$  immer möglich als die Eigenschwingungen mit der größten Frequenz.

Ist jedoch  $a\omega_0/\sqrt{\epsilon_D}/c > 2,40$ , dagegen  $a\omega_0/c < 2,40$ , so wird die Frequenz  $\omega_0$  nicht mehr erreicht und die  $(a\omega/\sqrt{\epsilon_D}/c)$ -Kurve der Abb. 11 fällt von einem Höchstwert bei  $m_D a = 0$  auf einen geringeren beim Höchst-

wert von  $m_D a$ . Ist schließlich auch  $a \omega_0/c > 2,40$ , so erreicht  $m_D a$  einen Höchstwert von 2,40 und die Frequenz für diesen Wert ist Null. Die Frequenzkurve fällt dann bei einem Höchstwert  $\omega_m (< \omega_0)$  bei  $m_D a = 0$  und wird Null bei  $m_D a = 2,4$  (Abb. 12).

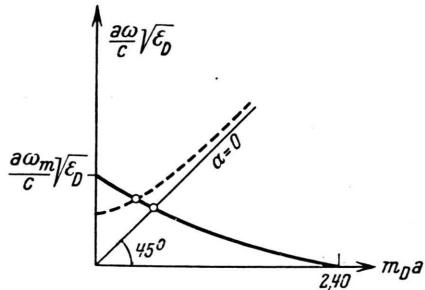


Abb. 12. Eigenfrequenzen eines dielektrischen Zylinders in einer Plasmaatmosphäre,  $m_D$  reell;  $\omega < \omega_0$ .  
 $a \omega_0/c \gg 2,38$ ;  $\omega_m \ll \omega_0$ .

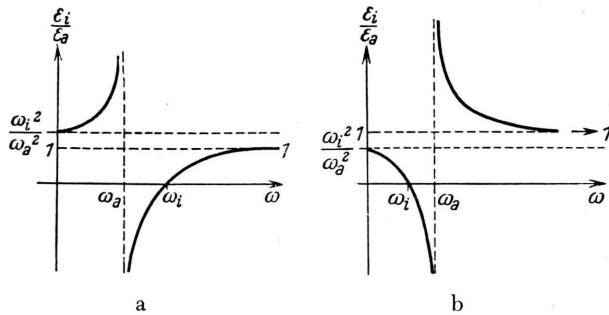


Abb. 13. Links  $\omega_i > \omega_a$ . Rechts  $\omega_i < \omega_a$ .  
 $\epsilon_i/\epsilon_a = (\omega^2 - \omega_i^2)/(\omega^2 - \omega_a^2)$ .

#### IV. Plasmazylinder in einer Plasmaatmosphäre

Befindet sich ein Plasmazylinder in einer Plasmaatmosphäre und verwendet man die Indizes  $i$  für den Zylinder,  $a$  für den Außenraum, so erhält man wie anfangs, für den Zylinder:

$$B_{q_i} = A_i J_0'(m_i r), \quad E_{r_i} = \frac{a c^2}{\omega \epsilon_i} J_0'(m_i r) A_i,$$

$$E_{z_i} = j \frac{m_i c^2}{\omega \epsilon_i} A_i J_0(m_i r)$$

und für den Außenraum:

$$B_{q_a} = A_a H_0^{1'}(j m_a' r), \quad E_{r_a} = \frac{a c^2}{\omega \epsilon_a} H_0^{1'}(j m_a' r) A_a,$$

$$E_{z_a} = - \frac{m_a' c^2}{\omega \epsilon_a} A_a H_0^1(j m_a' r),$$

und

$$m_i'^2 = \omega^2 \epsilon_i/c^2 - a^2, \quad m_a'^2 = a^2 - \omega^2 \epsilon_a/c^2,$$

$$\epsilon_i = 1 - (\omega_i^2/\omega^2), \quad \epsilon_a = 1 - (\omega_a^2/\omega^2),$$

d. h.

$$m_i'^2 + m_a'^2 = (\omega^2/c^2) (\epsilon_i - \epsilon_a) = (\omega_a^2 - \omega_i^2)/c^2. \quad (16)$$

Die Stetigkeitsbedingung für  $r = a$  ergibt:

$$m_i a \frac{J_0(m_i a)}{J_1(m_i a)} = j \frac{\epsilon_i}{\epsilon_a} m_a' a \frac{H_0^1(j m_a' a)}{H_1^1(j m_a' a)}, \quad (17)$$

wobei  $\epsilon_i/\epsilon_a = (\omega^2 - \omega_i^2)/(\omega^2 - \omega_a^2)$  ist. Den Verlauf von  $\epsilon_i/\epsilon_a$  zeigt Abb. 13 a und b.

Solange  $\omega_a > \omega_i$  gibt Gl. (17) Lösungen für reelles  $m_i$  und  $m_a'$  entsprechend Abb. 13 b, d. h. solange das äußere Plasma „dichter“ ist als das innere. In diesem Fall ist für  $\omega < \omega_i$  und  $\omega > \omega_a$ ,  $\epsilon_i/\epsilon_a$  positiv, dagegen für  $\omega_i < \omega < \omega_a$  negativ. Man hat formal dann Lösungen entsprechend der Abb. 2, d. h. entsprechend dem dielektrischen Zylinder in einer Plasmaatmosphäre, wenn dort  $\epsilon_p/\epsilon_D$  durch  $\epsilon_a/\epsilon_i$  ersetzt wird, wobei natürlich zu den Indizes ganz andere Frequenzen gehören, wie dort. In Abb. 2 war  $\omega^2 = \frac{\omega_0^2}{1 - (\epsilon_p/\epsilon_D) \epsilon_D}$ , während jetzt  $\omega^2 = \omega_i^2 \frac{1 - (\epsilon_i \omega_a^2/\epsilon_a \omega_i^2)}{1 - (\epsilon_i/\epsilon_a)}$  ist. Für  $\epsilon_i/\epsilon_a > 0$  ist  $\omega^2$  positiv für entweder  $\epsilon_i/\epsilon_a > 1$ , d. h.  $0 < \omega < \omega_i$  oder  $\epsilon_i/\epsilon_a < \omega_i^2/\omega_a^2$ ,  $\omega_a < \omega < \infty$ . Für  $\omega_i < \omega < \omega_a$ , existiert für  $\epsilon_i/\epsilon_a > 0$  eine Lücke in der Frequenz, die keine Ausbreitung ergibt. Ist dagegen  $\epsilon_i/\epsilon_a$  negativ,  $\omega_i < \omega < \omega_a$ , so ist  $\omega^2$  stets positiv. In diesem Gebiet kann wieder  $a$  zu Null werden, was  $m_i'^2/m_a'^2 = -\epsilon_i/\epsilon_a$  verlangt.

Die Lösungen für imaginäres  $m_i = j m_i'$  verlangen

$$m_a'^2 - m_i'^2 = (1/c^2) (\omega_a^2 - \omega_i^2) \quad (18)$$

und

$$j m_i' a \frac{J_0(j m_i' a)}{J_1(j m_i' a)} = j \frac{\epsilon_i}{\epsilon_a} m_a' a \frac{H_0^1(j m_a' a)}{H_1^1(j m_a' a)}. \quad (19)$$

Sie sind wieder nur möglich für negatives  $\epsilon_i/\epsilon_a$ , d. h. für  $\omega$  zwischen  $\omega_i$  und  $\omega_a$ . Wenn  $\omega_a > \omega_i$  ist, so ist  $m_a' > m_i'$  und sie entsprechen der Abb. 7. Ist  $\omega_i > \omega_a$ , so entsprechen sie dagegen der Abb. 8, d. h. dem Falle des Plasmazylinders in Luft. Der in diesen Abbildungen auftretenden Grenze  $-\epsilon_i/\epsilon_a = 1$  entspricht jetzt die Frequenz  $\omega^2 = (\omega_i^2 + \omega_a^2)/2$ , bei der die Phasengeschwindigkeit sich Null nähert, und die Welle in beide Plasmen hinein sehr starken Skin-Effekt hat.

Da meist die Radien der Kreise und die Achsen der Hyperbeln klein gegen 1 sein werden, kommen im

Fall der Abb. 2,  $\omega_a > \omega_i'$  mit reellem  $m_i$ , „dünnerer“ Plasmazylinder in „dichterer“ Plasmaatmosphäre (Elektronendichte innen geringer als außen) nur die Kurven mit negativem  $\epsilon_i/\epsilon_a$  in Frage, ( $\epsilon_i > 0, \epsilon_a < 0$ ). Die obere Grenzfrequenz liegt wieder auf der Grenzkurve CD mit  $a = 0, v_p = \infty$  der Abb. 2, mit  $\epsilon_a' \approx 0$ , d.h.  $\omega \approx \omega_a$ . Die untere Grenzfrequenz tritt auf für  $m_i = 0, a^2 = \omega^2 \epsilon_i/c^2$ . Dann ist nach Gl. (16)  $m_a'^2 = (1/c^2)(\omega_a^2 - \omega_i^2)$  was nach Voraussetzung klein gegen 1 sein soll. Aus Gl. (9) folgt für kleines  $m_a' a$  auch ein kleines  $\epsilon_a'/\epsilon_i$ , d.h.  $\omega$  liegt immer noch in der Nähe von  $\omega_a$ . Damit wird  $a^2 \approx (1/c^2)(\omega_a^2 - \omega_i^2)$  und die Phasengeschwindigkeit  $v_p \approx c^2 \omega_a^2 / (\omega_a^2 - \omega_i^2)$ . Im Fall der Abb. 7,  $\omega_a > \omega_i, m_i$  imaginär, beginnt die Hyperbel mit einem kleinen Abszissenwert  $m_a'$  für  $m_i' = 0$ , aus dem wieder  $\omega \approx \omega_a$  folgt und  $v_p \approx c \omega_a / \sqrt{\omega_a^2 - \omega_i^2}$ . Mit steigendem  $m_a' a$  nähert sich die Hyperbel der Asymptote und der Kurve für  $\epsilon_i/\epsilon_a' = 1$ , d.h. die Frequenz dem Werte  $\omega = (\omega_a^2 + \omega_i^2)/2$ , der kleiner ist als  $\omega_a$ . Da  $m_a'$  und  $m_i'$  sehr groß werden, wird  $\omega$  sehr groß, d.h. die Phasengeschwindigkeit geht gegen Null und in beiden Medien herrscht ein starker Skin-Effekt.

Schließlich im letzten Fall der Abb. 8,  $\omega_i > \omega_a, m_i$  imaginär, bei dem  $\omega_i > \omega_a$  sein muß, ist innen ein dichteres Plasma als außen (es bedeutet in der Abb. 8  $m_D' \rightarrow m_a', m_p' \rightarrow m_i'$ ) und es ergibt sich für  $m_a' = 0$  das Verhältnis  $\epsilon_i'/\epsilon_a$  (für  $\epsilon_i < 0, \epsilon_a > 0$ ) nach Abb. 8 sehr groß, d.h. nach Abb. 13  $\omega \approx \omega_a$ , und da  $m_a'^2 = a^2 - (\omega^2 \epsilon_a/c^2)$  ist, wird  $a = \omega \sqrt{\epsilon_a/c}$  und  $v_p = c/\sqrt{\epsilon_a}$  also sehr groß, weil  $\epsilon_a \ll 1$ . Dasselbe folgt aus dem Wert  $m_i'^2 = a^2 + (\omega^2 \epsilon_i'/c^2)$  für  $m_i' = 0$ . Mit wachsendem  $m_a'$  und  $m_i'$  nähert sich die Hyperbel der Asymptote und der Kurve  $\epsilon_i'/\epsilon_a' = 1$ , d.h. der Frequenz  $\omega^2 = (\omega_i^2 + \omega_a^2)/2$ , die größer als  $\omega_a$  ist.  $a$  wird sehr groß, die Phasengeschwindigkeit  $v_p$  geht gegen Null und es herrscht starker Skin-Effekt in beiden Medien. Die Gruppengeschwindigkeit muß zwischen beiden Frequenzen ein Maximum haben.

### Zusammenfassung

#### I. Dielektrischer Zylinder in Plasmaatmosphäre

a)  $m_D$  reell, d.h. in der Drahtachse stärkstes rein longitudinales elektrisches Feld.

1.  $\epsilon_p > 0, \omega > \omega_0$ .

Bei geringen Plasmadichten  $a \omega_0 \sqrt{\epsilon_D/c} \ll 2,40$  ist die Ausbreitung leicht abgeändert gegen die in Luft und es existiert eine untere Grenzfrequenz

$$\omega_{g_u} = \sqrt{\frac{(2,40 c/a)^2 - \omega_0^2}{\epsilon_D - 1}},$$

die für

$$\omega_0 \ll 2,4 c/a$$

$$\text{in } 2,4 \frac{c}{a} \frac{1}{\sqrt{\epsilon_D - 1}},$$

die untere Grenzfrequenz in Luft, übergeht. Bei  $\omega \rightarrow \infty$  nähert sich  $v_p \rightarrow c/\sqrt{\epsilon_D}$ .

2.  $\epsilon_p < 0, \omega < \omega_0$ .

Es existiert eine obere und eine untere Grenzfrequenz. Bei der einen Grenzfrequenz  $\omega_{g_1}$  ist  $a = 0, v_p = \infty$ . Bei der zweiten,  $\omega_{g_2}$ , ist  $v_p = c/\sqrt{\epsilon_D}$ . Für  $a \omega_0/c \ll 2,40$  liegen beide Frequenzen nahe bei  $\omega = \omega_0$  und es ist  $\omega_{g_1} > \omega_{g_2}$ . Mit wachsendem  $a \omega_0/c$  nehmen beide Frequenzen ab, für  $a \omega_0/c > 2,4$  wird  $\omega_{g_1} < \omega_{g_2}$  und die untere Grenzfrequenz geht gegen Null.

b)  $m_D$  imaginär,  $\omega < \omega_0, \epsilon_p < 0$ , longitudinales elektrisches Feld am schwächsten in der Drahtachse und anwachsend gegen die Ränder. Als besonders charakteristische Grenzfrequenz tritt  $\omega = \omega_0/\sqrt{1 + \epsilon_D}$  auf, mit der Phasengeschwindigkeit  $v_p = 0$  und starkem Skin-Effekt beiderseitig der Grenzfläche. Je nach der Größe von  $a \omega_0/c$  tritt eine zweite, darüber oder darunter gelegene Grenzfrequenz mit der Phasengeschwindigkeit  $v_p = c/\sqrt{\epsilon_D}$  auf. Wenn  $a \omega_0/c \ll 2,38$  ist, liegt diese Grenzfrequenz nahe  $\omega_0$ , dagegen für  $a \omega_0/c \gg 2,38$  liegt sie nahe dem Wert Null. Im ersten Fall nimmt die Phasengeschwindigkeit mit der Frequenz zu, im zweiten Fall dagegen ab. Besonders charakteristisch ist der Fall  $a \omega_0/c \approx 2,38$  und  $\epsilon_D = 1$ , weil in diesem Fall die Frequenzen stets sehr nahe an  $\omega = \omega_0/\sqrt{1 + \epsilon_D} \approx \omega_0/\sqrt{2}$  liegen, und in diesem sehr schmalen Frequenzband eine sehr starke Veränderung von Wellenlänge und Phasengeschwindigkeit auftritt.

#### II. Plasmazylinder in dielektrischer Atmosphäre

Longitudinales elektrisches Feld am schwächsten in der Zylinderachse, am stärksten am Rande.  $\omega < \omega_0$ . Es existiert eine obere Grenzfrequenz  $\omega = \omega_0/\sqrt{1 + \epsilon_D}$  mit der Phasengeschwindigkeit Null und sehr starkem Skin-Effekt ins Innere beider Medien. Mit abnehmender Frequenz nimmt  $v_p$  zu und bei  $\omega \rightarrow 0$  geht  $v_p$  gegen  $v_p = c/\sqrt{\epsilon_D}$ .

III. Eigenschwingungen, wenn die Zylinder an zwei Stellen von achsensenkrechtenden unendlich großen und gut leitenden Wänden im Abstand  $l$  begrenzt sind.

a) Dielektrischer Zylinder in Plasmaatmosphäre.

1.  $m_D$  reell,  $\omega > \omega_0$ .

Da  $a \omega_0/c$  meist klein ist gegen 1, erhält man in diesem Fall angenähert die gleichen Schwingungen, wie wenn der Zylinder sich in Luft befände.

2.  $m_D$  reell,  $\omega < \omega_0$ , Abb. 11.

Longitudinales Feld in der Zylinderachse am größten, nach außen abnehmend. Es ist immer die Schwingung mit  $a = 0$ , d. h. mit rein longitudinalem elektrischen Feld an allen Stellen möglich. Sie ist bei kleinem  $a\omega_0/c$  die höchste mögliche Eigenfrequenz, dagegen bei großem  $a\omega_0/c$  die geringste. Die Oberschwingungen (gemessen als Zahl der Halbwellen in der Längsachse des Zylinders) sind in der Frequenz nicht harmonisch. Es ist im allgemeinen nur eine beschränkte Zahl solcher Wellen möglich. Wenn  $l/a$  über gewisse Grenzen steigt, ist überhaupt keine Oberwelle möglich. Für  $a\omega_0/\sqrt{\epsilon_D}/c$ , klein gegen 2,4, liegen alle Schwingungen relativ nahe an  $\omega_0$ .

3.  $m_D$  imaginär,  $\omega < \omega_0$ , Abb. 10.

Longitudinales Feld in der Zylinderachse am kleinsten, nach den Rändern zu zunehmend. Die Oberschwingungen nähern sich mit wachsender Ordnungszahl  $k$  asymptotisch dem Grenzwert der Frequenz  $\omega_0/\sqrt{1+\epsilon_D}$ . Für  $a\omega_0/c \geq 2,38$  wächst die Frequenz mit der Ordnungszahl  $k$ , für  $a\omega_0/c \approx 2,38$  ändert sich die Frequenz sehr wenig mit der Ordnungszahl, für  $a\omega_0/c \leq 2,38$  nimmt die Frequenz mit der Ordnungszahl ab, da die Phasengeschwindigkeit rascher wächst als die Frequenz. Bei genügendem großen  $l/a$  sind alle Frequenzen von  $k = 1$  bis  $\infty$  möglich. Liegt aber  $l/a$  unter einer durch  $a\omega_0/c$  bestimmten Grenze, so sind u. U. die Grundwelle und einige benachbarte Oberwellen nicht möglich, und das Spektrum beginnt erst mit einer bestimmten Oberwelle und setzt sich weiter fort im Sinne steigender Ordnungszahl.

## b) Plazmazylinder in Luft, Abb. 9.

Die Eigenfrequenzen steigen mit Ordnungszahl  $k$  asymptotisch gegen die Frequenz  $\omega_0/\sqrt{2}$ . Es sind stets alle Eigenschwingungen von  $k = 1$  bis  $\infty$  möglich. Die Frequenzhäufung bei  $\omega_0/\sqrt{2}$  röhrt daher, daß dort die Phasengeschwindigkeit stark mit der Frequenz abnimmt.

## IV. Plazmazylinder in Plasmaatmosphäre

Es sind hier folgende Wellen möglich:

a) Reelles  $m_i$  für  $\omega_a^2 > \omega_i^2$ , d. h. longitudinales elektrisches Feld in der Achse am größten, wobei  $\epsilon_i/\epsilon_a$  positiv oder auch negativ sein kann, entsprechend dem analogen Feld des dielektrischen Zylinders in Plasmaatmosphäre.  $\epsilon_i/\epsilon_a > 0$  verlangt  $\omega < \omega_i$  oder  $\omega > \omega_a$ ,  $\epsilon_i/\epsilon_a < 0$  verlangt  $\omega_i < \omega < \omega_a$ .

b) Imaginäres  $m_i$ , longitudinales elektrisches Feld in der Drahtachse am schwächsten, nach den Rändern zu ansteigend, nur möglich für negatives  $\epsilon_i/\epsilon_a$ , d. h.  $\omega$  zwischen  $\omega_a$  und  $\omega_i$ . Für  $\omega_a > \omega_i$  ist  $m_a' > m_i'$  und entspricht dem Fall des dielektrischen Zylinders in Plasmaatmosphäre mit imaginärem  $m_D$ . Dagegen  $\omega_i > \omega_a$  entspricht dem Fall des Plazmazylinders in einer dielektrischen Umgebung. Die Grenzfrequenz mit  $v_P = 0$  ist jetzt  $\omega^2 = (\omega_i^2 + \omega_a^2)/2$  mit  $m_i'$  und  $m_a' \rightarrow \infty$ , d. h. sehr starker Skineffekt nach beiden Seiten der Grenzfläche. Im Falle nicht zu dichten Plasmen,  $\omega_i a/c$  und  $\omega_a a/c \ll 2,4$ , kommt in allen Fällen nur  $\epsilon_i/\epsilon_a$  negativ in Frage. Im Falle a) liegt dann  $\omega$  immer in der Nähe von  $\omega_a$  und  $v_P$  ändert sich mit einer kleinen Abnahme von  $\omega$  von  $v_P \approx \infty$  bis auf  $v_P \approx c/\sqrt{1-(\omega_i/\omega_a)^2}$ . Im Falle b) mit  $\omega_a > \omega_i$  beginnt der Zustand mit einer oberen Grenzfrequenz  $\omega \approx \omega_a$  und  $v_P \approx c/\sqrt{1-(\omega_i/\omega_a)^2}$  mit  $m_i' = 0$ , praktisch homogenes Feld im Zylinder, und geht über zur unteren Grenzfrequenz  $\omega^2 = (\omega_a^2 + \omega_i^2)/2$  mit  $v_P \rightarrow 0$  und starkem beiderseitigem Skineffekt. Dagegen im Falle b) mit  $\omega_i > \omega_a$  existiert eine untere Grenzfrequenz in der Nähe von  $\omega_a$  mit einer Phasengeschwindigkeit, die viel größer als die Lichtgeschwindigkeit  $c$  ist. Mit steigender Frequenz nimmt  $v_P$  ab und erreicht schließlich die obere Grenze  $\omega^2 = (\omega_i^2 + \omega_a^2)/2$ , bei der  $v_P$  gegen Null geht und starker Skineffekt beiderseits der Grenze beider Medien herrscht.

In allen untersuchten Fällen ist eine Grenzflächenwelle möglich mit kleiner Phasengeschwindigkeit, deren Energie in unmittelbarer Nähe der Grenzfläche konzentriert ist. Die Frequenz dieser Welle ist  $\omega = \omega_0/\sqrt{1+\epsilon_D}$  bzw.  $\omega = \sqrt{(\omega_a^2 + \omega_i^2)/2}$ .